

ANÁLISE TERMOMECAÂNICA E PROBABILÍSTICA DE UM PAVIMENTO DE CONCRETO EM REGIME TRANSIENTE MODELADO VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Albert Willian Faria¹ & Fábio Martin Rocha¹

RESUMO

FARIA, A.W., ROCHA, F.M. Análise Termomecânica e Probabilística de um Pavimento de Concreto em Regime Transiente Modelado via Método dos Elementos Finitos. **Perspectivas Online: Exatas & Engenharia**, v.11, n.33, p.1-18, 2021.

O presente artigo apresenta um estudo estatístico e de sensibilidade de um pavimento de concreto submetido a um gradiente térmico em regime transiente. Dois modelos em 3D, um determinístico e outro probabilístico, são implementados no software ANSYS APDL, cuja base é o método dos elementos finitos, considerando-se a simetria geométrica e de carregamento termomecânico. O pavimento de concreto é composto por uma placa de concreto apoiada em uma base de concreto rolado e essa sob uma sub-base de poliuretano. Os elementos hexagonais Solid70 e Solid185 são utilizados na modelagem do pavimento, possuem respectivamente um grau de liberdade térmico e três graus de liberdade mecânicos por nó e um total de 8 nós. Incertezas na geometria e nas propriedades termomecânicas dos materiais constituintes do pavimento são inseridas nos modelos implementados utilizando a simulação de Monte Carlo, associada a amostragem por

hipercubo latino. A análise de sensibilidade das variáveis de projeto também é realizada utilizando o coeficiente de correlação de Spearman. A distribuição das temperaturas sofridas pela placa de concreto utilizando o modelo determinístico foi comparada e validada de acordo com a literatura. O modelo probabilístico proposto permite demonstrar, de forma estatística, como as incertezas afetam as temperaturas e os valores máximos e mínimos para os deslocamentos verticais na placa de concreto. A análise de sensibilidade permitiu constatar a baixa significância da sub-base nas respostas mecânicas do pavimento. O modelo probabilístico também permite a obtenção das estatísticas e funções de distribuição acumulada de probabilidade das variáveis de saída da placa de concreto, que podem ser utilizadas no seu projeto.

Palavras-chave: Pavimento de concreto, MEF probabilístico, Simulação de Monte Carlo, Rank Correlation Coefficient.

¹Universidade Federal do Triângulo Mineiro, Instituto de Ciências Tecnológicas e Exatas – ICTE - Avenida Doutor Randolpho Borges Júnior – 1250, Uberaba, MG, CEP: 38064200, Brasil

(*) e-mail: awfaria2021@gmail.com

Data de recebimento: 21/07/2021

Aceito para publicação: 30/09/2021

Data de publicação: 23/10/2021.

THERMOMECHANICAL AND PROBABILISTIC ANALYSIS OF A CONCRETE PAVEMENT IN TRANSIENT REGIME MODELED USING FINITE ELEMENTS METHOD

Albert Willian Faria¹ & Fábio Martin Rocha¹

ABSTRACT

FARIA, A.W., ROCHA, F.M. Análise Termomecânica e Probabilística de um Pavimento de Concreto em Regime Transiente Modelado via Método dos Elementos Finitos. **Perspectivas Online: Exatas & Engenharia**, v.11, n.33, p.1-18, 2021.

Statistical and sensitivity study of a concrete pavement subjected to a thermal gradient in transient state is presented. Two 3D models, one deterministic and other probabilistic, are implemented in ANSYS APDL software by finite element method. Geometric and thermomechanical symmetry conditions are adopted. The concrete pavement consists of a concrete slab supported on a roller-compacted concrete (RCC) under a polyurethane sub-base. Hexagonal elements with a total of 8 nodes denominate Solid70 and Solid185, which have respectively one thermal degree of freedom per node or three mechanical degrees of freedom, are used by pavement modeling. Geometric and materials uncertainties are included of the models using the Monte Carlo simulation associated with Latin hypercube sampling.

Sensitivity analysis of design variables is also performed using Spearman's correlation coefficient. The temperature distribution across the concrete slab is compared and validated according to literature using the deterministic model. The probabilistic model demonstrates how the uncertainties affect the temperatures and maximum and minimum vertical displacements probabilistic values suffered by the concrete slab. On the other hand, the sensitivity analysis reveals the low significance of the sub-base in the pavement mechanics responses. Statistics and accumulated probability distribution functions of output variables of the concrete slab, which can be used for the pavement design, are obtained.

Keywords: Concrete pavement, probabilistic Finite Element Method, Monte Carlo Simulation, Rank Correlation Coefficient.

¹ Federal University of Triangulo Mineiro, Institute of Technological and Exact Sciences – ICTE - Doutor Randolpho Borges Júnior Avenue– 1250, Uberaba, MG, Postal code: 38064200, Brazil

(*) e-mail: awfaria2021@gmail.com

Received: 21/07/2021

Accepted: 30/09/2021

Published online: 23/10/2021

1. INTRODUÇÃO

Entre os fatores que mais afetam o projeto de um pavimento estão a chuva e a mudança de temperatura, ou seja, o clima (MAITRA et al., 2013). Especificamente nos pavimentos de concreto, a temperatura afeta as tensões de duas maneiras distintas. A variação diária da temperatura causa mudanças rápidas no gradiente térmico ao longo de sua profundidade e a placa de concreto tende a empenar-se para cima ou para baixo quando submetida a uma diminuição ou a um aumento da variação da temperatura através de sua espessura. E, devido ao seu peso próprio, surgem tensões de empenamento na interface com a base. Harr e Leonards (1959) apud Raia et al. (2010), em um dos trabalhos numéricos pioneiros nesse campo de pesquisa, mostraram que diferenciais de temperatura de apenas 2,0 °C entre a superfície e o fundo do pavimento podem provocar tensões elevadas na placa de concreto.

Diversos trabalhos que levam em consideração o clima brasileiro, de predominância tropical, no projeto de pavimentos de concreto podem ser citados: Balbo et al. (2000), Severi (2002), Bandeira et al. (2009), Raia et al. (2010) e Martinez (2018). No entanto, para uma análise mais real do comportamento termomecânico dos pavimentos de concreto deve-se levar em conta a grande dispersão e a incerteza existentes nas variáveis de projeto. De acordo com a AASHTO (2015), as variáveis de entrada tipicamente usadas no projeto de pavimentos de concreto incluem: o tráfego, o clima e as propriedades dos materiais constituintes. As dispersões de valores associadas a essas variáveis de projeto são inerentes a seu procedimento de obtenção ou de estimativa (experimental ou empírico ou semiempírico). Além da estimativa dessas incertezas, o conhecimento das variáveis mais influentes no comportamento do pavimento pode contribuir para uma redução de custo, aumento em sua vida útil e confiabilidade (MEDINA e MOTTA, 2015). A análise da sensibilidade é um procedimento estatístico usado para avaliar a variabilidade dos dados de saída de um modelo devido à variação dos seus dados de entrada, e, na prática, pode ser utilizada para determinar quais são os parâmetros de projeto que devem ser determinados de maneira mais precisa (WU et al., 2017, MEDINA e MOTTA, 2015). De acordo com Wu et al. (2017), a análise da sensibilidade das variáveis de projeto dos pavimentos tem sido mais intensamente estudada a partir da publicação do método de dimensionamento de pavimentos MEPDG (*Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide*) pela AASHTO em 2004. Esse método, atualmente em vigor nos EUA, apresenta um software com o mesmo nome e permite o projeto de pavimentos de concreto e asfáltico, novos ou reabilitados.

Este trabalho estuda o comportamento termomecânico de um pavimento de concreto, submetido a um gradiente térmico em regime transiente, considerando e não as incertezas em suas variáveis de projeto. O presente trabalho visa investigar a influência das propriedades termomecânicas dos materiais do pavimento conjuntamente com sua geometria nos valores da temperatura e deslocamentos (de origem térmica) desenvolvidos no pavimento, sem levar em consideração as condições de tráfego, umidade e fissuração no concreto. Um modelo determinístico e outro probabilístico de um pavimento de concreto são formulados via método dos elementos finitos (MEF) na plataforma computacional ANSYS APDL. O modelo probabilístico proposto emprega a simulação de Monte Carlo (SMC), associada ao método de amostragem por hipercubo latino (LHS), na definição das incertezas e propagação aleatória nas variáveis de entrada do pavimento. A análise de sensibilidade é realizada usando o coeficiente de correlação de Spearman utilizando os mesmos dados probabilísticos gerados durante a SMC.

2. METODOLOGIA

2.1 Comportamento termomecânico dos pavimentos de concreto

Devido à extensa área superficial dos pavimentos de concreto eles são fortemente influenciados pelo ambiente ao qual estão expostos. Ao longo do dia a convecção e a radiação são responsáveis pelo fluxo de calor entre o meio e a superfície do concreto, aumentando a temperatura superficial da placa de concreto, e, por condução, é transmitido para o interior da massa de concreto (MARTINEZ, 2018).

O fluxo de calor que sai de uma superfície S de um volume V em um incremento de tempo qualquer é igual a variação do calor gerado com o acumulado no seu interior (por unidade de tempo t) devido à elevação da temperatura T , e pode ser representado pela seguinte equação da condução de calor em um meio anisotrópico e regime transitório (REDDY, 2003; MARTINEZ, 2018):

$$\dot{q} + \nabla \mathbf{q} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

sendo \dot{q} o vetor taxa de calor gerado por unidade de volume V e tempo t , $\nabla = [\partial/\partial x \ \partial/\partial y \ \partial/\partial z]$, \mathbf{q} o vetor fluxo de calor, ρ a densidade do material, c o calor específico (considerando volume ou deformação constante) e T o vetor da temperatura variando conforme o vetor unidirecional.

Na Eq. (1), tem-se que $\mathbf{q} = \mathbf{k} \nabla T$, ou seja, \mathbf{q} é proporcional ao gradiente térmico ∇T . Essa equação é a equação constitutiva do problema térmico, sendo \mathbf{k} o tensor de condutividade térmica. Neste trabalho, os materiais do pavimento são considerados uniformes, ou seja, suas propriedades térmicas e mecânicas são invariáveis com o tempo e temperatura. Tal hipótese é reforçada pelo fato que a variação de temperatura considerada nos modelos é inferior à 20°C, intervalo este que não apresenta mudanças significativas nas propriedades dos materiais.

Dentre os fatores internos no pavimento que provocam a taxa de calor \dot{q} na Eq. (1), a hidratação do concreto no estado fresco é uma das principais fontes de variação, e, dentre os externos tem-se as condições climáticas (como o calor e o frio), aliadas a baixa umidade do ar e à ação do vento (SANTOS, 2019). Nesse trabalho considera-se que a hidratação do aglomerante já foi concluída, ou seja, somente fatores externos influenciaram a taxa de calor transmitida ao pavimento.

Conhecida a distribuição de temperatura que ocorre no pavimento, por meio da Eq. (1), as tensões e as deformações de origem térmica podem ser obtidas a partir da equação de equilíbrio estático (REDDY, 2003):

$$\nabla \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 \quad (2)$$

sendo $\boldsymbol{\sigma}$ o tensor das tensões e \mathbf{f} o vetor das forças de corpo por unidade de volume. O campo de temperatura T , incorporado na Eq. (2) por meio do vetor \mathbf{f} , permite a obtenção das tensões e deformações de origem térmica (pela lei de Duhamel-Neumann).

A solução analítica das equações ordinárias diferenciais (1) e (2), especificamente aquelas utilizadas na modelagem matemática de pavimentos de concreto sujeitos a gradientes térmicos é conhecida deste 1927 por meio do trabalho pioneiro de Westergaard. No entanto,

para pavimentos multicamada, as soluções analíticas das equações ordinárias diferenciais (1) e (2) variam conforme as condições de contorno adotadas. Neste contexto, uma estratégia que ganhou força a partir de 1950, sobretudo pelo advento e desenvolvimento dos computadores, para a soluções de equações diferenciais ordinárias é o uso de métodos numéricos, e dentre eles destaca-se o método dos elementos finitos (MEF). No MEF, equações diferenciais complexas e que definem o domínio do problema são subdivididas em subdomínios (chamados elementos) por meio de equações lineares simples. Esses subdomínios são recombinados sistematicamente em um sistema global de equações, escrito na forma matricial, para o cálculo da equação diferencial do problema. Diversos trabalhos que utilizam o MEF estão disponíveis na literatura científica e, dentre eles, pode-se citar o de Ramos et al. (2018) que aborda a análise estrutural probabilística de um cais de terminal de contêineres por meio de simulações de Monte Carlo usando o software ANSYS e o trabalho de Campos et al. (2021), sobre o uso da transformada contínua de wavelet na detecção de danos em vigas e uma treliça modeladas no ANSYS e analisadas no Matlab.

2.2 Simulação de Monte Carlo e análise de sensibilidade aplicadas no projeto de pavimentos de concreto

Mais recentemente, as incertezas inerentes das variáveis de projeto de sistemas estruturais diversos foram incluídas em suas modelagens no MEF, dando origem ao chamado MEF probabilístico (ou estocástico) por intermédio, por exemplo, da simulação de Monte Carlo (SMC). A simulação de Monte Carlo (SMC), método que faz uso de números aleatórios, tem o seu nome em referência a cidade de Monte Carlo, localizada no principado de Mônaco e famosa por seus cassinos (BECK, 2019). Fatores favoráveis a utilização da SMC: a facilidade de implementação computacional, abrangência no trabalho com problemas complexos (lineares e não lineares) em diferentes áreas (economia, medicina, astrofísica e etc.) e a robustez das soluções. O fator negativo está associado ao “custo” e tempo de processamento computacional.

A SMC envolve a definição de funções de densidade de probabilidade, técnicas de amostragem e gerador de número aleatórios.

A função densidade de probabilidade (FDP) de uma variável aleatória contínua X é uma função $f(x)$ usada para descrever o conjunto das probabilidades associadas aos possíveis valores desta variável, conforme equação (MONTGOMERY *et al.*, 2013):

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

Em síntese, a FDP é usada para calcular uma área que representa a probabilidade de X assumir um valor no intervalo $[a, b]$. Desde que a FDP seja não negativa para todo valor real de x e $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$ então as probabilidades estão restritas ao intervalo $0 \leq P(a < X < b) \leq 1$.

Existe um grande número de FDP utilizadas para a distribuição de uma variável aleatória X , dentre elas: a gaussiana, a uniforme, a exponencial, de Weibull, a lognormal e a gamma.

Outra maneira de descrever a distribuição de probabilidade de uma variável aleatória discreta X , é o uso da função distribuição acumulada (FDA) de X que se trata de uma função F de um número real x que fornece a probabilidade de X ser menor ou igual a x .

Durante a SMC, evita-se repetir as variáveis aleatórias avaliadas nas amostragens anteriores. Segundo Beck (2019), técnicas de amostragem inteligente têm sido desenvolvidas, tal como a amostragem por hipercubo latino (LHS, do inglês *Latin Hyper-cube Sampling*) para reduzir o número necessário de amostras. Na amostragem LHS o domínio de cada variável aleatória é dividido em faixas amostradas uma única vez, resultando numa distribuição esparsa e homogênea dos pontos no domínio em problemas multidimensionais (BECK, 2019). Normalmente a amostragem LHS associada a SMC requer entre 20 a 40 % menos *loops* de simulações, porém com os mesmos resultados e acuracidade da SMC sem o uso desta técnica de amostragem (ALTABEY *et al.*, 2018).

Uma dificuldade da modelagem probabilística de pavimentos de concreto está na estimativa das estatísticas associadas a suas variáveis de projeto. Neste sentido, trabalhos como os de Lytton e Zollinger (1993), de Shin *et al.* (1999) e de Banerjee (2016) fornecem alguns parâmetros estatísticos importantes que podem ser empregados na modelagem probabilística. Na ausência de parâmetros é comum em problemas de engenharia a adoção de distribuição de probabilidade gaussiana com coeficiente de variação estatística (Cov) igual a 5%. O Cov é uma medida da dispersão nos valores possíveis da variável aleatória em relação à sua média (μ).

Além da inserção das incertezas inerentes as variáveis de entrada do pavimento, uma importante etapa do projeto é a busca das variáveis de entrada mais influentes em suas respostas (térmicas e/ou mecânicas) de interesse por meio da chamada análise de sensibilidade.

Segundo Frey *et al.* (2003) os métodos de análise de sensibilidade podem ser classificados em matemáticos (empregados em modelos determinísticos e probabilísticos), estatísticos (utilizados em modelos probabilísticos) e gráficos (complementares a modelos matemáticos e estatísticos). Esses e outros métodos, bem como suas aplicações, vantagens e desvantagens são apresentados nos trabalhos de Frey e Patil (2002), Frey *et al.* (2003) e Frey *et al.* (2004).

Dois métodos estatísticos estão presentes na plataforma numérica ANSYS: o *Sample* e o *Rank Correlation Coefficients*. Coeficiente de Correlação trata-se de uma análise estatística que relaciona as variáveis de entrada de um modelo ou sistema com as variáveis de saída e é obtida a partir dos dados da amostra a partir do cálculo do parâmetro populacional r (variando entre -1 e +1, sendo -1 uma correlação dita negativa, 1 positiva e 0 indicando a falta de correlação). Basicamente existem dois tipos de Coeficientes de Correlação: o de Pearson (ou *Rank Correlation*) e o de Spearman (ou *Sample Correlation*), dadas segundo a equação (FREY e PATIL, 2002; ANSYS, 2004):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}} \quad (4)$$

onde n é o tamanho da amostra analisada do processo probabilístico. Considerando o coeficiente de correlação de Pearson (CCP), \bar{x} é o valor médio da variável aleatória X do grupo de observações $[x_1, x_2 \dots x_n]^T$, \bar{y} é o valor médio da variável aleatória Y do grupo de

observações $[y_1, y_2 \dots y_n]^T$. Já, para o coeficiente de correlação de Spearman (CCS), x_i e y_i são dados por suas classificações dentro do grupo de observações correspondente, enquanto \bar{x} e \bar{y} são as classificações das médias de x_i e y_i , respectivamente.

Segundo Frey *et al.* (2004), os coeficientes CCP e CCS são empregados no estudo da sensibilidade global de modelos lineares e monotônicos, respectivamente. Como pode ser observado na Eq. 4, a expressão para o cálculo do CCP e do CCS é similar, exceto pelo ranqueamento dos dados da amostragem no CCS. Já em termos de análise, de acordo com Frey *et al.* (2004), CCP avalia a força da associação linear existente entre os valores de entrada com os de saída do modelo, enquanto o CCS mede a força da relação monotônica existente entre as variáveis aleatórias (randômicas). Por isso, o CCP é considerado impreciso para modelos não lineares enquanto o CCS para os modelos não monotônicos. Neste trabalho, será utilizado o CCS para a análise de sensibilidade estatística do pavimento de concreto em decorrência da não linearidade do problema tratado. No ANSYS APLD, as variáveis de entrada do MP são consideradas insignificativas quando apresentam correlações $-0,1 < r < 0,1$.

2.3 Modelagem numérica do pavimento: modelos determinístico e probabilístico

O pavimento de concreto em estudo foi proposto inicialmente nos trabalhos, numérico e experimental, de Bandeira *et al.* (2009) e de Raia *et al.* (2010). É formado por uma placa de concreto de dimensões planas 1,78 m x 3,00 m e espessura 0,15 m, apoiada em uma base de concreto rolado de espessura 0,10 m e que é apoiada por sua vez em uma sub-base de poliuretano de 0,15 m de espessura, conforme ilustrado na Figura 1a.

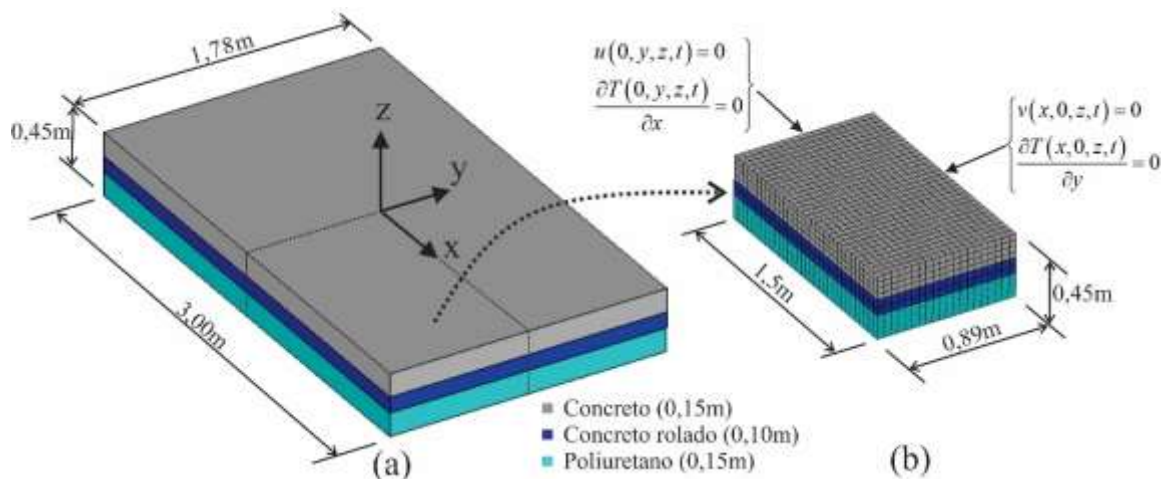


Figura 1. Geometria do pavimento de concreto (a) e modelagem de $\frac{1}{4}$ do pavimento via MEF com aplicação das condições de simetria (b).

Segundo o trabalho de Bandeira *et al.* (2009), a aplicação de diferenciais de temperatura sob a placa de concreto, ilustrada na Figura 1a, é baseada na curva de radiação solar devido ao ciclo térmico (de 24 h). Para isso, foi proposto pelos autores a utilização de 8 rampas de aquecimento por meio da utilização de uma plataforma de aquecimento (controlada eletromecanicamente) posicionada sob o pavimento de concreto e transmitindo o calor por radiação e por convecção. Ainda de acordo com Bandeira *et al.* (2009), a superfície de indução térmica eleva a temperatura inicial (T_0) do pavimento até um valor máximo de estabilização (*bulk temperature*), tendo uma duração de 6 h. Após essa temperatura, a

temperatura do pavimento contínua sendo controlada pela fonte de indução térmica por mais 2 h, porém sofrendo um resfriamento gradual. A fonte térmica então é desligada e o pavimento passa a sofrer um resfriamento natural e gradual durante as 16 h restantes do ciclo térmico.

No presente trabalho, dois modelos numéricos, um determinístico (MD) e outro probabilístico (MP), são implementados no ANSYS APDL para a análise térmica e mecânica do pavimento de concreto ilustrado na Figura 1a. O MP, considerado uma extensão do MD, adota incertezas nos seus parâmetros de entradas em vista aos estudos estatístico e de sensibilidade do pavimento de concreto ilustrado na Figura 1a.

Dois tipos de elementos, o Solid70 e o Solid185, são utilizados na obtenção de ambos os modelos, sendo o primeiro utilizado na análise térmica do pavimento e o segundo na mecânica. Esses dois elementos sólidos possuem campos térmicos e mecânicos acoplados, tem forma hexagonal e apresentam cada um oito nós. Além disso, o elemento Solid70 têm um grau de liberdade (gdl) térmico por nó (temperatura T) enquanto o Solid185 possui três gdl mecânicos por nó (translações u , v e w nas direções x , y e z , respectivamente).

Com vista a redução do “custo” e do tempo de processamento computacional na solução do problema, principalmente do probabilístico, optou-se pela modelagem de apenas um quarto do pavimento de concreto (conforme ilustrado na Figura 1b), empregando as condições de contorno térmicas e mecânicas informadas na Figura 1b, ou seja: gradientes térmicos $\partial T / \partial x$ e $\partial T / \partial y$ nulos nas faces $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente; e, deslocamentos nodais u e v nulos nas faces $y = 0$ e $x = 0$, respectivamente. Além dessas condições de simetria, os deslocamentos nodais u , v e w são adotados nulos na face $z = -0,45$ m do pavimento de concreto.

Ambos os modelos, MD e MP, implementados no ANSYS APDL possuem 5544 gdl térmicos e 16632 gdl mecânicos, apresentando um total de 4480 elementos (Solid70 ou Solid185), sendo 32 elementos na direção x e 20 na direção y , como ilustrado na Figura 1b. Além disso, a placa, a base e a sub-base do pavimento foram discretizadas respectivamente com quatro, dois e um elemento ao longo de sua espessura, conforme Figura 1b. Nos trabalhos de Bandeira *et al.* (2009) e Raia *et al.* (2010) somente o modelo determinístico deste mesmo pavimento é implementado no ANSYS, usando os mesmos elementos citados. No entanto, por não adotarem a condição de simetria na modelagem do pavimento, o modelo 3D por eles implementado possui um total de 21840 nós e 18368 elementos. Assim, o uso da condição de simetria na modelagem do pavimento de concreto reduz consideravelmente o tamanho dos modelos, condição importante sobretudo na solução do problema com o MP.

Na solução do problema probabilístico, o ANSYS executa múltiplos passos (*loops*) para computar a estatística das variáveis aleatórias de entrada do MP. A estatística das variáveis aleatórias de saída resultante é ilustrada neste *software* por meio de gráficos de histograma, curvas de distribuição de probabilidade (FDA e FDP) e por gráficos de históricos. Já a sensibilidade das variáveis aleatórias de entrada pode ser ilustrada por meio de gráficos de barras e/ou de pizza.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

3.1 Análise determinística do pavimento de concreto em regime transiente

As propriedades térmicas e mecânicas dos materiais constituintes do pavimento de concreto, modelado com o MD, são apresentadas na Tabela 1.

Tabela 1. Propriedades termomecânicas dos materiais empregados na modelagem do pavimento de concreto

Material	Condutividade térmica $W/(^{\circ}C.m)$	Coef. de expansão $^{\circ}C^{-1}$	Calor específico $J/(kg.^{\circ}C)$	Densidade kg/m^3	Módulo de Young MPa	Coef. de Poisson -
Concreto	$8,00 \times 10^{-1}$	$1,00 \times 10^{-5}$	1000	2400	31645,95	0,30
Concreto rolado	$8,00 \times 10^{-1}$	$1,00 \times 10^{-5}$	1000	2400	24825,12	0,30
Poliuretano	$2,50 \times 10^{-2}$	$1,00 \times 10^{-6}$	1500	40	4,70	0,30

Fonte: Raia *et al.* (2010)

Inicialmente, o pavimento encontra-se a temperatura ambiente e uniforme de $22^{\circ}C$ (T_0). Um filme de convecção térmica igual a $100 W/m^2$ é aplicado diretamente sob a placa de concreto até ser atingida a temperatura máxima de estabilização (*bulk temperature*) de $40^{\circ}C$ ao final de 21600 s (6 h). Após esse período de tempo, a superfície de indução térmica é retirada (desligada) e a placa sofre um resfriamento gradual no decorrer dos 64800 s (18 h) restantes de análise.

A figura 2 ilustra a distribuição de temperatura ao longo da espessura do pavimento de concreto para diferentes instantes de tempo empregando o MD, obtidas adotando para a solução transiente do problema térmico um passo de tempo (Δt) igual a 10 s e tempo total de análise de 86400 s (24 h).

A Figura 2a ilustra a distribuição de temperatura no pavimento passados 12180 s em que a superfície de indução térmica é ligada, a Figura 2b ilustra a distribuição no instante de desligamento da superfície de indução, a Figura 2c ilustra a distribuição na fase de resfriamento e a Figura 2c no instante final de análise.

Observa-se na Figura 2a que em apenas 12180 s a temperatura ($38,761^{\circ}C$) da superfície de rolamento da placa de concreto está próxima da máxima temperatura ($39,057^{\circ}C$) que ocorre em 21600 s de aquecimento da placa de concreto (Figura 2b), enquanto que a base e a sub-base do pavimento ainda se encontram com temperatura próxima da temperatura ambiente de $22^{\circ}C$. Conforme ilustrado na Figura 2d, a temperatura final do pavimento em 86400 s é igual a $28,607^{\circ}C$ enquanto que a temperatura da sub-base é igual a $26,856^{\circ}C$.

Como pode ser observado na Tabela 2 (colunas Ref), Bandeira *et al.* (2009) obtiveram (numericamente) na superfície do pavimento nos instantes de tempo 28800 s e 86400 s as temperaturas máximas de $33,816^{\circ}C$ e $28,885^{\circ}C$, respectivamente, e também obtiveram na sub-base do pavimento como temperaturas mínimas $22,435^{\circ}C$ e $26,998^{\circ}C$, respectivamente. No presente trabalho (colunas MD), e considerando-se estes mesmos intervalos de tempo, as temperaturas máximas foram iguais respectivamente a $33,463^{\circ}C$ e $28,607^{\circ}C$ enquanto as mínimas $22,563^{\circ}C$ e $26,856^{\circ}C$. Assim, o erro percentual das temperaturas obtidas entre ambos os modelos determinísticos é igual respectivamente a 1,044 %, 0,962 %, 0,571 % e 0,525 %.

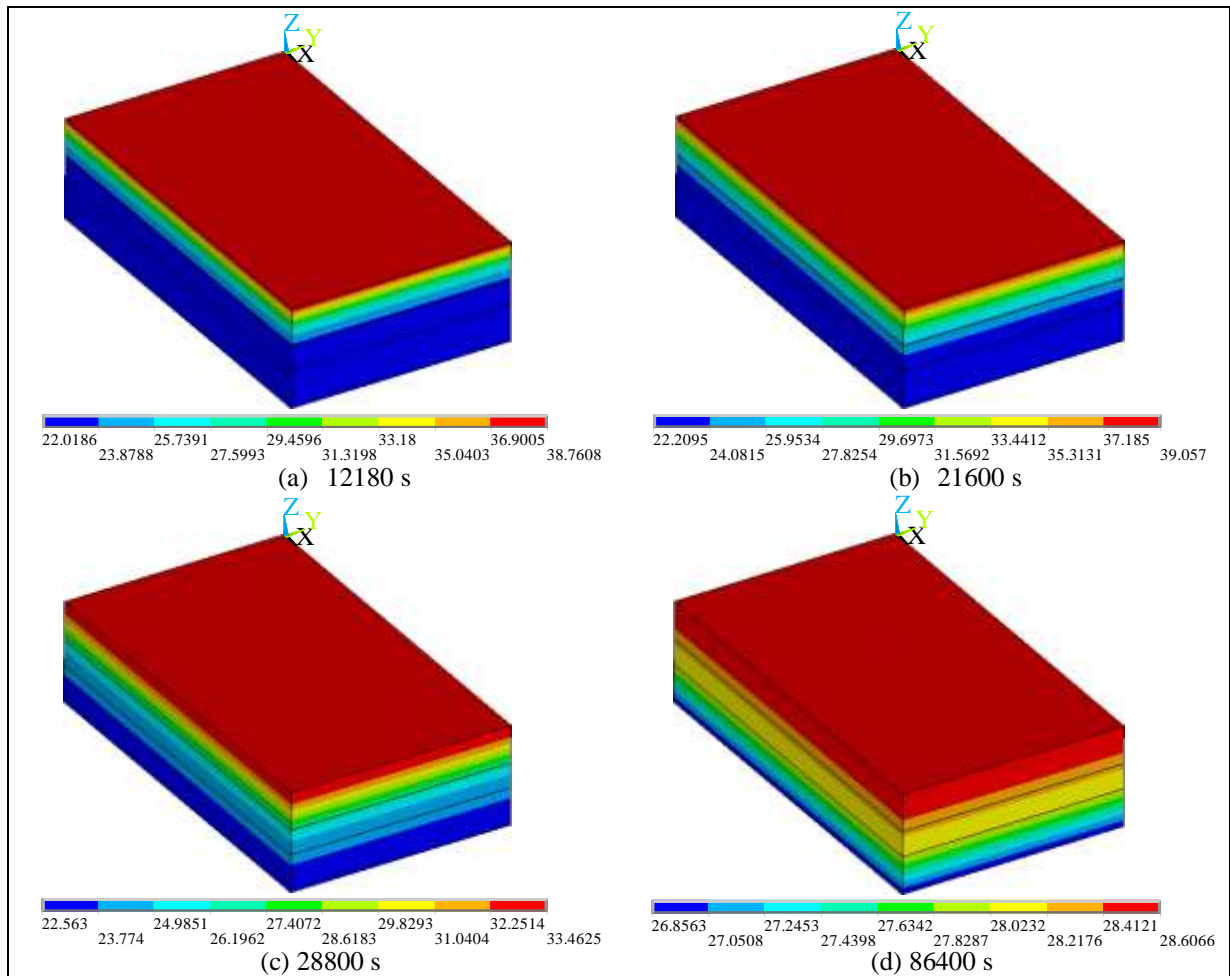


Figura 2. Distribuição de temperatura no pavimento de concreto para diferentes instantes de análise: (a) 12180 s, (b) 21600 s, (c) 28800 s e (d) 86400 s.

Tabela 2. Comparação entre as temperaturas no pavimento obtidas empregando os modelos determinísticos considerando diferentes posições e instantes de tempo

Tempo / Posição	Superfície da base do pavimento			Sub-base		
	Ref	MD	$ 100 \times (\text{Ref} - \text{MD}) / \text{Ref} $	Ref	MD	$ 100 \times (\text{Ref} - \text{MD}) / \text{Ref} $
	(°C)	(°C)	(%)	(°C)	(°C)	(%)
28800 s	33,816	33,463	1,044	22,435	22,563	0,571
86400 s	28,885	28,607	0,962	26,998	26,856	0,525

Fonte: Bandeira *et al.* (2009), colunas Ref, e Autores, colunas MD

O trabalho de Bandeira *et al.* (2009) não informa como foi aplicado o padrão de aquecimento sob a placa na fase de aquecimento. A parte experimental do trabalho de Raia *et al.* (2010), de coautoria dos mesmos autores anteriores, sugere que a carga térmica foi aplicada em oito patamares de aquecimento (já comentado), no entanto, os valores utilizados em suas simulações numéricas também não são fornecidos de maneira clara. Assim, no presente trabalho a convecção térmica e a *bulk temperature* são aplicadas diretamente sob a placa na fase de aquecimento (entre 0 a 6 h), o que pode ter interferido na pequena discrepância observada entre os resultados numéricos obtidos entre o presente trabalho com o de Bandeira *et al.* (2009).

A Figura 3, compara a temperatura obtida ao longo da espessura z da placa de concreto com os valores de *Bandeira et al.* (2009) - designado nesta figura como referência (ref.) - ao longo do tempo.

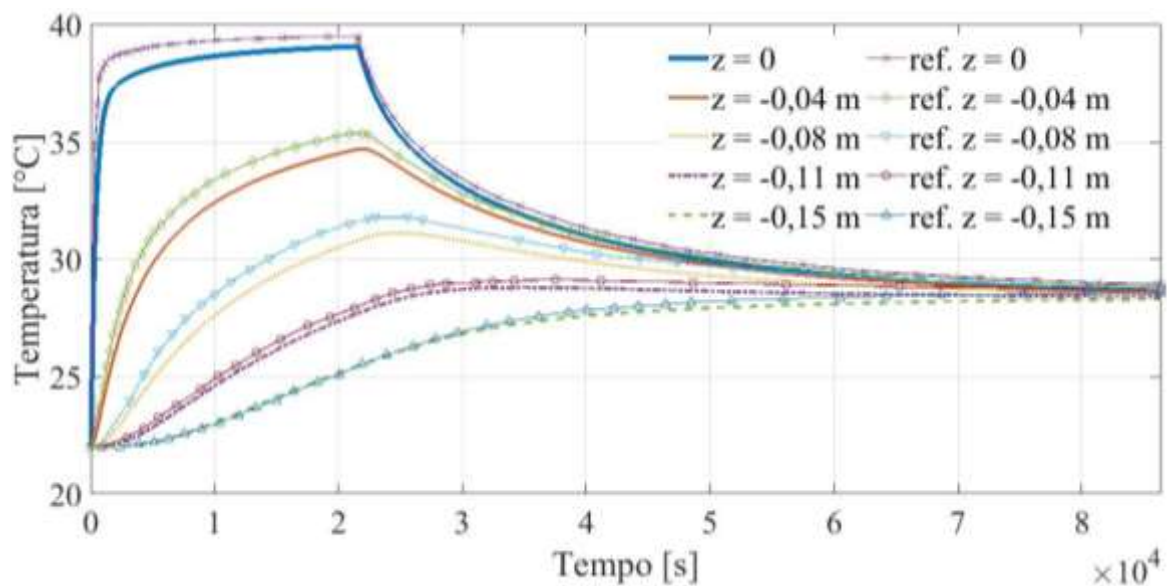


Figura 3. Comportamento da temperatura ao longo do tempo para diferentes coordenadas z ao longo da espessura da placa de concreto.

Pode-se observar na Figura 3 que, quantitativamente, o comportamento da distribuição de temperatura ao longo da profundidade z da placa de concreto é semelhante aos resultados obtidos pela referência, apresentando uma fase de aquecimento com rápida elevação da temperatura (entre 0 a 21600 s) e uma fase de resfriamento mais lenta (entre 21600 a 86400 s), com estabilização da temperatura em aproximadamente 28 °C após decorridos 86400 s. Há uma pequena discrepância entre os valores obtidos em ambos os modelos numéricos, e, como anteriormente comentado, pode estar associado a aplicação da carga térmica, assumida neste trabalho como constante.

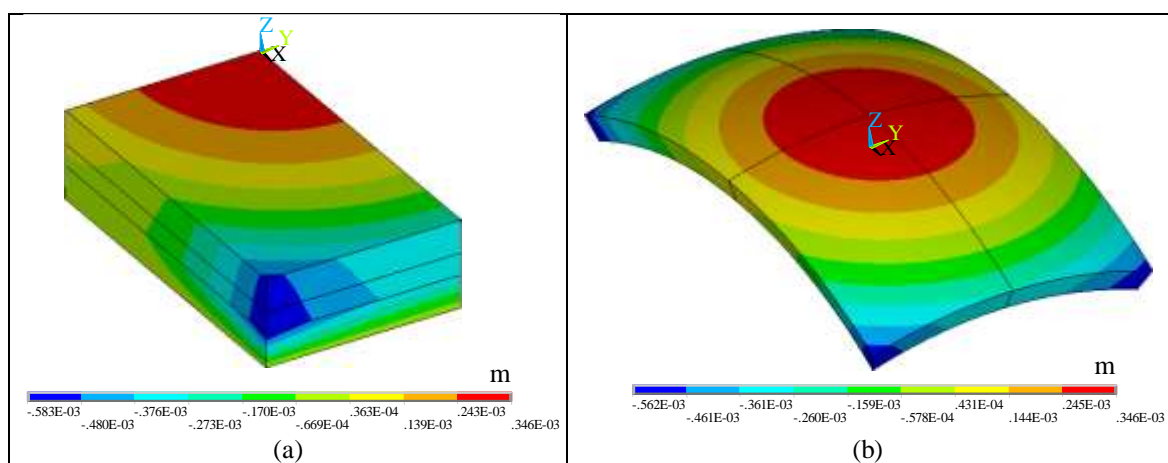


Figura 4. Pavimento analisado no instante 12180 s: (a) deflexão na direção z do pavimento considerando $1/4$ de modelo, e, (b) empenamento cônico da placa de concreto com escala ampliada igual a 700.

Após a realização da análise térmica, o campo de distribuição de temperatura em função do tempo é aplicado no pavimento de concreto, provocando a indução de tensões e deformações de origem térmica. Na Figura 4, são ilustrados os campos de deslocamentos verticais w que surgem no pavimento de concreto e na placa de concreto no incremento de tempo 12180 s.

Tabela 3. Comparação entre os deslocamentos mecânicos sofridos pela base de concreto no instante 12180 s empregando os modelos determinísticos

Máximo deslocamento vertical			Mínimo deslocamento vertical		
Ref	MD	$ 100 \times (\text{Ref} - \text{MD}) / \text{Ref} $	Ref	MD	$ 100 \times (\text{Ref} - \text{MD}) / \text{Ref} $
$10^{-3} (m)$	$10^{-3} (m)$	(%)	$10^{-3} (m)$	$10^{-3} (m)$	(%)
0,283	0,346	22,3	-0,584	-0,583	0,17

Fonte: Raia et al. (2010), colunas Ref, e Autores, colunas MD

Na Figura 4b observa-se que a placa de concreto assume a forma convexa, o que já era esperado em decorrência da maior temperatura atingida em sua superfície de rolamento (33,463 °C) em relação a que ocorre na interface placa-base (26,664 °C). Além disso, a distribuição do campo de deslocamentos mecânicos, ilustrado na Figura 4a, se assemelha muito a obtida no estudo numérico de Raia *et al.* (2010). No entanto, Raia *et al.* (2010) obtiveram, como informado na Tabela 3 (colunas Ref), como máximos e mínimos deslocamentos verticais w no pavimento de concreto os valores $0,283 \times 10^{-3}$ m e $-0,584 \times 10^{-3}$ m, respectivamente. Já na simulação numérica proposta, como informado na Tabela 3 (colunas MD), os valores dos deslocamentos verticais são iguais respectivamente a $0,346 \times 10^{-3}$ m e $-0,583 \times 10^{-3}$ m (conforme ilustrado na Figura 4a), ou seja, com erro percentual entre os modelos igual respectivamente a 22,3 % e 0,17 %. Essa diferença se deve provavelmente a forma de aplicação do padrão de aquecimento térmico sob a placa de concreto entre ambos os modelos, já comentada na simulação precedente.

3.2 Análise probabilística do pavimento de concreto em regime transiente

A Tabela 4 apresenta as variáveis aleatórias de entrada adotadas no MP do pavimento de concreto, seus símbolos e suas estatísticas. São definidas para cada variável, mecânica ou térmica, o tipo função de distribuição de probabilidade, a sua covariância (Cov) ou os seus valores limites (máximo e mínimo). A covariância das variáveis aleatórias é obtida dos trabalhos de Lytton e Zollinger (1993), Shin *et al.* (1999) e Banerjee (2016), considerando valores médios, e uma distribuição gaussiana com Cov de 5% é usada para as demais variáveis aleatórias cujos parâmetros probabilísticos não foram encontrados na literatura.

As variáveis aleatórias de entrada utilizadas na análise probabilística do pavimento e informadas na Tabela 4 são: a espessura (h_i), a densidade (ρ_i), o módulo de Young (E_i), o coeficiente de Poisson (ν_i), o calor específico (c_i), o coeficiente de condutividade térmica (k_i), o coeficiente de expansão térmica (α_i), o gradiente térmico (δT) e a convecção térmica (h). O índice (i), com i igual a 1, 2 ou 3, é utilizado para designar respectivamente as propriedades dos materiais associados a placa, a base e a sub-base do pavimento. Ao todo foram adotadas vinte e três variáveis aleatórias de entrada, sendo somente as dimensões em planta do pavimento, ou seja: $L_x = 3,00$ m e $L_y = 1,78$ m, variáveis determinísticas, ou seja, não aleatórias. Os gradientes térmicos fornecidos na Tabela 4 correspondem a uma variação de $\pm 1^\circ\text{C}$ no valor da máxima temperatura (40°C) aplicado sob a placa de concreto de 0,15 m de espessura.

Tabela 4. Parâmetros estatísticos das variáveis mecânicas e térmicas do pavimento de concreto

	Propriedades	Símbolo	Cov (%)	Máximo e Mínimo	Distribuição Probabilística
Mecânica	Espessura da placa, base e sub-base ^(a)	$h_1; h_2; h_3$	8,5; 12,5; 8,5	-	gaussiana
	Densidade da placa, base e sub-base ^(a)	$\rho_1; \rho_2; \rho_3$	7,5; 12,5; 15	-	gaussiana
	Módulo Young da placa, da base e da sub-base ^(a)	$E_1; E_2; E_3$	15; 14; 15	-	gaussiana
	Coefficiente de Poisson da placa, da base e da sub-base ^(b)	$\nu_1; \nu_2; \nu_3$	3; 3; 3	-	gaussiana
Térmica	Calor específico da placa ^(c) , da base ^(c) e da sub-base ^(*)	$c_1; c_2; c_3$	15; 15; 5	-	gaussiana
	Coefficiente de condutividade térmica da placa ^(c) , da base ^(c) e da sub-base ^(*)	$k_1; k_2; k_3$	5,49; 5,49; 5	-	gaussiana
	Coefficiente de expansão térmica da placa, da base e da sub-base ^(*)	$\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3$	5; 5; 5	-	gaussiana
	Gradiente térmico ^(*)	δT	-	272,333 °C/m e 262 °C/m	uniforme
	Convecção térmica ^(*)	h	5	-	gaussiana

Fontes: ^(a) Lytton e Zollinger (1993), ^(b) Shin *et al.* (1999), ^(c) Banerjee (2016), ^(*) parâmetro adotado.

As variáveis mecânicas de interesse nesta simulação numérica incluem os deslocamentos verticais w_c e w_b , obtidos respectivamente nas coordenadas (x, y, z) : $(0,0,0)$ e $(1,5 \text{ m}, -0,89 \text{ m}, -0,15 \text{ m})$, ou seja, no centro (w_c) e em uma das bordas (w_b) da placa de concreto, especificamente na interface placa-base. Esses deslocamentos w_c e w_b são escolhidos por serem respectivamente os máximos e mínimos deslocamentos verticais sofridos pela placa de concreto durante a análise probabilística. A temperatura é a única variável aleatória de saída de origem térmica e, seis temperaturas são obtidas conforme coordenada z fornecida: Temp_1 ($z = 0$), Temp_2 ($z = -0,0375 \text{ m}$), Temp_3 ($z = -0,075 \text{ m}$), Temp_4 ($z = -0,15 \text{ m}$), Temp_5 ($z = -0,20 \text{ m}$) e Temp_6 ($z = -0,25 \text{ m}$). Sendo que Temp_1 , Temp_2 e Temp_3 são temperaturas localizadas na placa de concreto, enquanto Temp_4 está localizada na interface placa-base e Temp_5 na base. Já a temperatura Temp_6 está localizada na interface da base com a sub-base.

Na simulação probabilística do pavimento de concreto, o número de amostragem foi variado de maneira contínua até a verificação da convergência dos resultados estatísticos, sendo adotado neste trabalho 500 amostras na SMC. Além disso, os resultados probabilísticos ilustrados e discutidos na sequência são obtidos da solução termomecânica do MP do pavimento de concreto no instante de tempo 12180 s, adotando um incremento de tempo igual a 10 s.

A Figura 5a ilustra os valores médios do w_c conforme o número de amostras usados na SMC, considerando um limite de confiança igual a 95%. Essa figura demonstra a convergência do valor médio dessa variável aleatória de saída conforme o aumento do número de amostras. Já a Figura 5b ilustrada o histograma da espessura da placa de concreto (h_1), que representa a frequência relativa dessa quantidade aleatória para o qual o histograma é plotado.

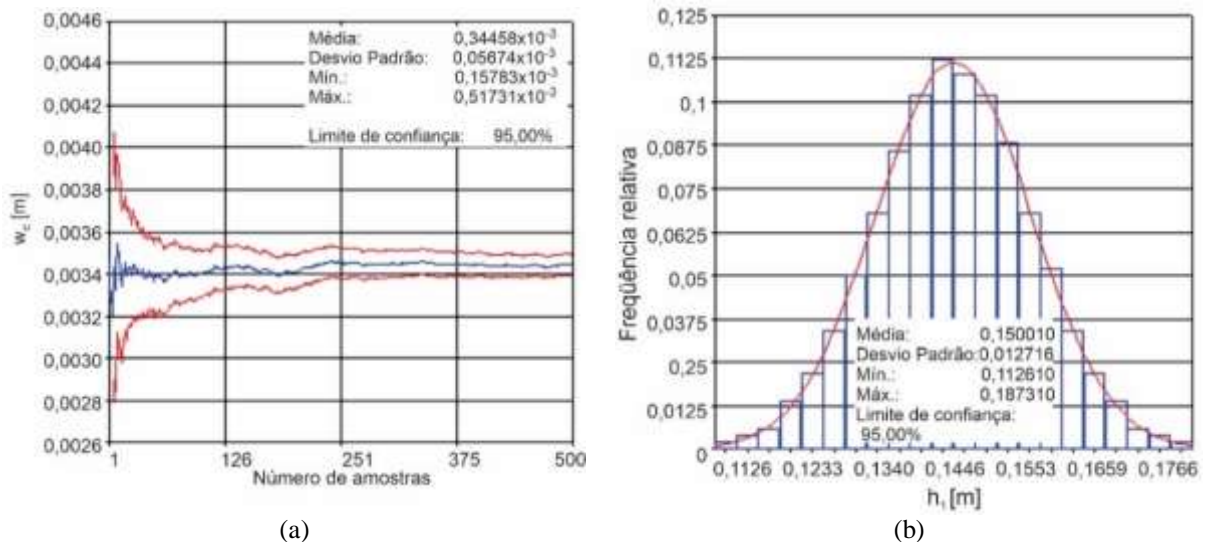


Figure 5. Histórico do valor da média da variável de saída w_c (a) e histograma da variável de entrada h_1 (b).

Os valores da média, do desvio padrão e do máximo e mínimo do gráfico do histórico de cada uma das variáveis aleatórias de saída de interesse são informados na Tabela 5.

Tabela 5. Variáveis de saída e estatísticas obtidas considerando 500 amostras e limite de confiança de 95%.

Variável de saída	Média	Desvio Padrão	Mínimo	Máximo
Temp ₁ (°C)	38,760	0,547	37,720	39,840
Temp ₂ (°C)	33,070	0,794	30,630	35,380
Temp ₃ (°C)	28,510	0,998	25,780	31,400
Temp ₄ (°C)	23,590	0,588	22,410	25,940
Temp ₅ (°C)	22,530	0,258	22,100	23,790
Temp ₆ (°C)	22,260	0,170	22,030	23,290
w_c (m)	$3,446 \times 10^{-4}$	$5,675 \times 10^{-5}$	$1,578 \times 10^{-4}$	$5,173 \times 10^{-4}$
w_b (m)	$-5,600 \times 10^{-4}$	$1,150 \times 10^{-4}$	$-9,135 \times 10^{-4}$	$-1,883 \times 10^{-4}$

Da Tabela 5, pode-se verificar que o valor médio do deslocamento vertical (w_c) obtido na placa de concreto é $0,3446 \times 10^{-3}$ m, com desvio padrão de $5,675 \times 10^{-5}$ m. Já o deslocamento vertical (w_b) médio localizado na borda da placa é igual a $-0,5600 \times 10^{-3}$ m, com desvio padrão de $1,150 \times 10^{-4}$ m.

A Figura 6 ilustra a sensibilidade das variáveis de saída w_c e w_b utilizando o CCS e limite de confiança igual a 95%, sendo que as variáveis de entrada não ilustradas nesta figura são consideradas insignificativas.

Observando a Figura 6a, nota-se que α_1 , α_2 , E_1 , δT , h_2 , E_3 e c_2 são, em ordem decrescente, as variáveis mais influentes no deslocamento w_c . Pode-se verificar também que α_1 , E_1 , δT e c_2 atuam no aumento do w_c enquanto que α_2 , h_2 e E_3 atuam em sua diminuição. Ou, seja as quatro primeiras variáveis citadas tem sensibilidade (correlação) positiva enquanto as demais negativa. Isso demonstra que as variáveis que atuam diretamente no aumento da temperatura e, conseqüentemente, na deformação térmica da placa de concreto são as que mais influenciam positivamente no deslocamento central.

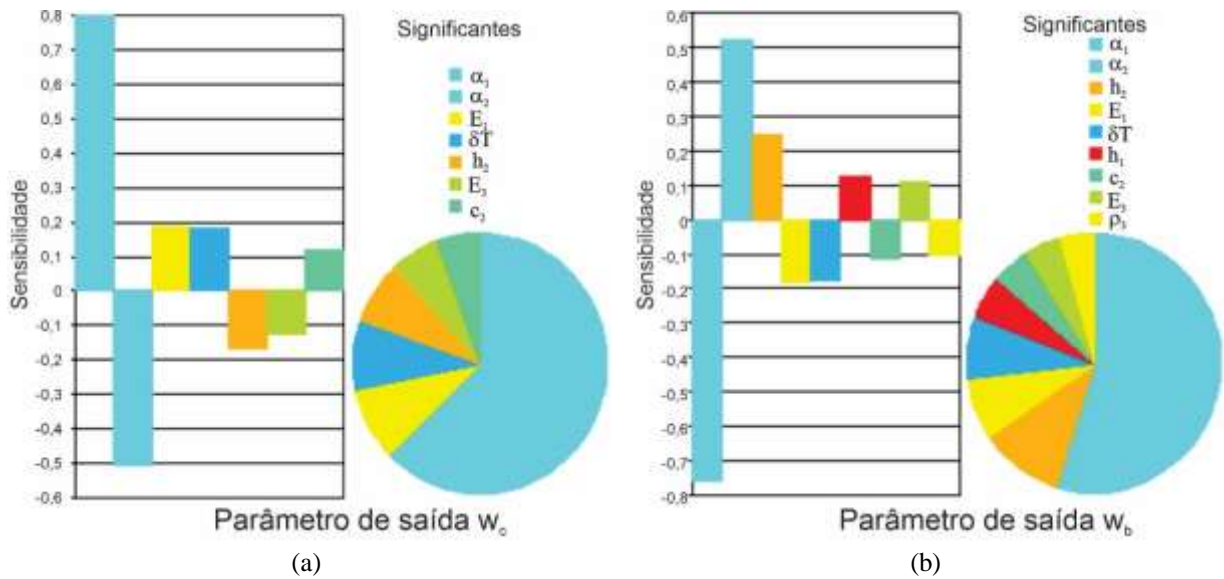


Figura 6. Análise da significância das variáveis de entrada da placa de concreto em relação aos parâmetros de saída: (a) w_c e (b) w_b . Adaptado do ANSYS APDL.

A única variável referente às camadas internas que influencia positivamente no deslocamento w_c é o calor específico da placa de base (c_2). Tal correlação pode ser explicada, pois o acréscimo do calor específico na placa de base reduz o aumento de temperatura desta camada, concentrando o calor na placa de concreto e aumentando o gradiente térmico ao longo do pavimento. Entretanto, propriedades que impeçam a deformação térmica, ou que dificultem as deformações mecânicas das camadas mais internas, tendem a reduzir o deslocamento central, atuando como restrições aos deslocamentos térmicos da camada superior.

Analisando a sensibilidade da variável aleatória de saída w_b , conforme Figura 6b, pode-se constatar que as variáveis aleatórias de entrada: α_1 , α_2 , h_2 , E_1 , δT , h_1 , c_2 , E_3 e ρ_3 , em ordem decrescente, são as variáveis de entrada mais influentes na variável de saída w_b . As variáveis α_1 , E_1 , δT , c_2 e ρ_3 por sua vez apresentavam sensibilidade negativa, enquanto as demais positiva. Essa situação é inversa a ocorrido na condição anterior visto que o deslocamento vertical nos dois pontos analisados é oposto, uma vez que a placa de concreto se empena de maneira convexa devido ao gradiente térmico aplicado (ilustrado na Figura 4b).

A Figura 7 ilustra a função de distribuição acumulada dos deslocamentos w_c e w_b . Observando as FDA ilustradas nas Figuras 7a e 7b é possível afirmar por exemplo que existe 95% de probabilidade das variáveis w_c e w_b serem menores que 0,572 mm e -0,522 mm, respectivamente. Em contrapartida, também pode-se afirmar que existem 5% de probabilidade destas mesmas variáveis aleatórias de saída serem menores a 0,346 mm e -0,098 mm, respectivamente.

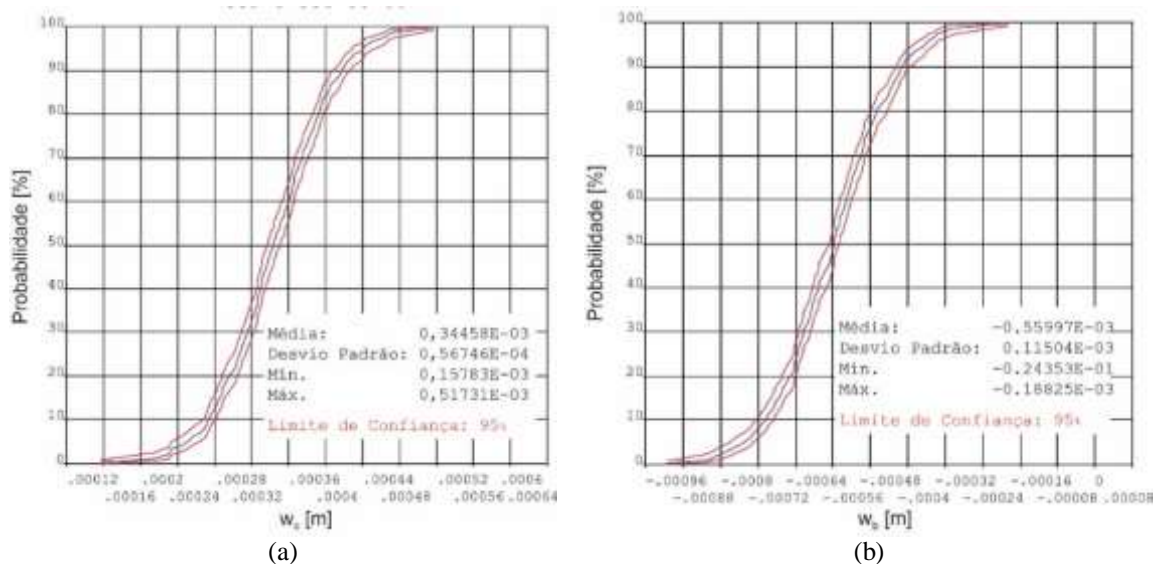


Figura 7. FDA do deslocamento vertical no centro (a) e na borda da placa de concreto (b).

4. CONCLUSÕES

A modelagem numérica via MEF de um pavimento de concreto composto por uma placa de concreto apoiada em uma base de concreto rolado e uma sub-base de poliuretano e submetido a um gradiente térmico em regime transiente, é apresentada neste trabalho. Dois modelos 3D são implementados no ANSYS APDL, um determinístico (MD) e outro probabilístico (MP), utilizando os mesmos elementos, condições de contorno térmicas e mecânicas e o conceito de redução de modelos por simetria (geométrica e de carregamento térmico aplicado). A propagação das incertezas nas variáveis de projeto do pavimento no MP é realizada por meio da simulação de Monte Carlo (SMC) associada à técnica de amostragem hipercubo latino. Na SMC as variáveis de entrada são descritas por funções de densidade de probabilidade, médias, covariâncias ou máximo e mínimo, obtidas através da literatura científica. O modelo probabilístico resultante permite o estudo da sensibilidade, via emprego do coeficiente de correlação de Spearman, entre as variáveis de entrada e de saída.

Os resultados numéricos obtidos com o emprego do MD evidenciam o empenamento (curvatura) esperado da placa de concreto quando submetida a uma fonte de convecção térmica e máxima temperatura (*bulk temperature*). Os valores das temperaturas apresentados são validados numericamente por meio de dados disponíveis na literatura científica, enquanto os mecânicos são validados qualitativamente. Já os resultados numéricos obtidos na simulação probabilística do pavimento de concreto indicam, no intervalo de tempo 12180 s, que as propriedades térmicas do material da sub-base têm pouca influência sobre as temperaturas e máximos e mínimos deslocamentos verticais sofridos pela placa de concreto.

Funções de distribuição acumulada dos máximos e mínimos deslocamentos verticais sofridos pela placa de concreto são apresentadas e permitem descrever a distribuição de probabilidade de cada uma dessas variáveis aleatórias de valor real x . Pode-se, afirmar que existe 95% de probabilidade dos deslocamentos verticais máximo e mínimo sofridos pela placa de concreto serem menores que 0,572 mm e -0,522 mm, respectivamente, e, que existe 5% de probabilidade destes mesmos deslocamentos verticais serem menores respectivamente a 0,346 mm e a -0,098 mm.

5. REFERÊNCIAS

- ALTABEY, W. A.; NOORI, M.; WANG, L. **Using ANSYS for finite element analysis, Volume II: dynamic, probabilistic design and heat transfer analysis**. New York: Momentum Press, 2018.
- AMERICAN ASSOCIATION OF STATE HIGHWAY AND TRANSPORTATION OFFICIALS. AASHTO. **Mechanistic-Empirical Pavement Design Guide: A Manual of Practice**. Washington, DC: American Association of State Highway and Transportation Officials, Second Edition, 2015.
- BALBO, J. T.; SEVERI, A. A.; RODOLFO, M. P.; PEREIRA, D. S. Pesquisa dos efeitos do clima sobre pavimentos de concreto: instrumentação da pista experimental na USP. Panorama Nacional da Pesquisa em Transportes. In: ANPET, XIV, Gramado, 2000. **Anais do XIV Congresso de Pesquisa e Ensino em Transportes**. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Pesquisa e Ensino em Transportes, 2000, v. 1, p. 533-538.
- BANDEIRA, A. A.; RAIÁ, F. & NETO, M. M. Estudo numérico e experimental de um pavimento submetido a diferenciais térmicos controlados. In: Congresso Brasileiro do Concreto, 51, 2009, **Anais dos CBC 2009**. Curitiba: Associação Brasileira de Cimento Portland, 2009, p. 1-12. Disponível em: <<https://www.ipen.br/biblioteca/2009/eventos/14639.pdf>>. Acesso em: 15 de março de 2021.
- BANERJEE, D. K. An analytical approach for estimating uncertainty in measured temperatures of concrete slab during fire. **Fire Safety Journal**, v. 82, p. 30-36, 2016. doi.org/10.1016/j.firesaf.2016.03.005
- BECK, A. T. **Confiabilidade e segurança das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2019.
- CAMPOS, P. J. T.; KOROISHI, E. H; FARIA, A. W. SHM de sistemas estruturais usando transformadas de wavelet. **Perspectivas Online: Exatas & Engenharias**, v. 11, n. 32, p. 1-18. DOI: <https://doi.org/10.25242/885X113220212286>
- FREY, H. C.; MOKHTARI, A. FREY, H. C.; MOKHTARI, A.; DANISH, T. **Evaluation of Selected Sensitivity Analysis Methods Based Upon Applications to Two Food Safety Process Risk Models, Office of Risk Assessment and Cost-Benefit Analysis**: relatório técnico. Washington, DC: U. S. Department of Agriculture, 2003.
- FREY, H. C.; MOKHTARI, A.; ZHENG, J. **Recommended Practice Regarding Selection, Application, and Interpretation of Sensitivity Analysis Methods Applied to Food Safety Process Risk Models. Office of Risk Assessment and Cost-Benefit Analysis**: relatório técnico. Washington, DC: U. S. Department of Agriculture, 2004.
- FREY, H. C.; PATIL, S. R. Identification and Review of Sensitivity Analysis Methods. **Risk Analysis**, v. 22, n. 3, p. 553-578, 2002. Doi: [10.1111/0272-4332.00039](https://doi.org/10.1111/0272-4332.00039)
- LYTTON, R.L.; ZOLLINGER, D. G. Modeling Reliability in Pavements. In: Transportation Research Board, 72, 1993, Washington. **TRB 72nd annual meeting**. Washington: Transportation Research Board, 1993.

MAITRA, S. R.; REDDY, K. S.; RAMACHANDRA, L. S. Estimation of Critical Stress in Jointed Concrete Pavement. **Procedia - Social and Behavioral Sciences**, v. 104, p. 208 – 217, 2013. doi.org/10.1016/j.sbspro.2013.11.113

MARTINEZ, U. B. **Uma contribuição ao estudo do comportamento termomecânico dos pavimentos de concreto em pátios de aeronaves**. 2018. 118 p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Espírito Santo, 2018.

MEDINA, J.; MOTTA, L. M. G. **Mecânica dos pavimentos**. 3ª edição. Rio de Janeiro: Interciência, 2015.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C.; HUBELE, N. P. **Estatística aplicada à engenharia**. 2ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

PAPADOPOULOS, V.; GIOVANIS, D. G. **Stochastic finite element methods: an introduction**. Athens: Springer, 2018.

RAIA, F.; BANDEIRA, A. A.; NETO, M. M.; MELLO JR., A. G.; PAPPALARDO JR., A. Sobre o empenamento térmico de estruturas rígidas. In: National Congresso of Mechanical Engineering, VI, 2010, Campina Grande. **Anais do Congresso Nacional de Engenharia Mecânica**. Rio de Janeiro: Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2010. Disponível em: < <https://www.abcm.org.br/anais/conem/2010/PDF/CON10-1394.pdf> >. Acesso em: 04 de março de 2021.

RAMOS, A.P.; LIMA, J.P.S.; REAL, M.V. A probabilistic analisys of the forces in the piles of a container terminal wharf under ship berthing actions. **Perspectivas Online: Exatas & Engenharias**, v. 8, n. 20, p. 78-88, 2018. DOI: <https://doi.org/10.25242/885X82020181308>

REDDY, J.N. **Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis**. 2ª Edição. Boca Raton: CRC Press, 2003.

RIBEIRO, S. C. S.; CARDOSO, E. L. Estudo do Acoplamento Termo-Mecânico no Processo de Fusão Seletiva a Laser. In: Simpósio de Métodos Numéricos em Engenharia, 2, Curitiba. **Anais do II SMNE. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional**, São Carlos, pp. 267-273, 2017.

SANTOS, S. B. **Fenômeno térmico do concreto: fundamentos e aplicações práticas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2019.

SEVERI, A. A. **Estudo dos gradientes térmicos em pavimentos de concreto de cimento Portland no ambiente tropical**. 2002. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2002.

SHIN, K. Y.; KIM, S. B.; KIM, J. H.; CHUNG, M.; JUNG, P. S. Thermo-physical properties and transiente heat transfer of concrete et elevated temperatures. **Nuclear Engineering and Design**, v. 212, 1-3, p. 233-241, 2002. [doi.org/10.1016/S0029-5493\(01\)00487-3](https://doi.org/10.1016/S0029-5493(01)00487-3)

WU, Z.; YANG, X.; SUN, X. Application of Monte Carlo filtering method in regional sensitivity analysis of AASHTOWare Pavement ME design. **Journal of Traffic and Transportation Engineering**, v. 4, n. 2, p. 185-197, 2017. doi.org/10.1016/j.jtte.2017.03.006